УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета факультета математики, информационных и авиационных технологий
от «16» июня 20_20_ г., протокол № 5/20
Председатель __________ Волков М.А.
(подпись, расшифровка подписи)
«_16_» ___июня___ 20_20_ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина	Функциональный анализ
Факультет	Математики, информационных и авиационных технологий
Кафедра	Прикладная математика
Курс	3

Направление (специальность): 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Направленность (профиль/специализация): Технология программирования

Форма обучения: очная

Дата введения в учебный процесс УлГУ: «_01_» __сентября__ 20_20_г.

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол №_____ от _____ 20____г.
Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол №_____ от _____ 20____г.
Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол №_____ от _____ 20____г.

Сведения о разработчиках:

ФИО	Кафедра	Должность, ученая степень, звание
Богданов Андрей Юрьевич	Прикладной математики	Доцент, к.ф.м.н., доцент

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой прикладной математики, реализующей дисциплину	Заведующий выпускающей кафедрой информационных технологий
_____________/_____Бутов А.А._____/ *Подпись* *ФИО* «_15_» ___июня___ 20_20_ г.	_____________/_____Волков М.А.____/ *Подпись* *ФИО* «_16_» ___июня___ 20_20_ г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

Цели освоения дисциплины: Данная дисциплина знакомит студентов с важнейшими методами функционального анализа, как классическими, так и численными. Достижение этих целей обеспечивает выпускнику получение высшего профессионально профилированного образования и обладание перечисленными ниже общими и предметно-специализированными компетенциями. Дисциплина "Функциональный анализ" непосредственно связана с дисциплинами "Алгебра и геометрия", "Математический анализ", "Дифференциальные уравнения".

Задачи освоения дисциплины: Предметом изучения являются общая теория бесконечномерных метрических пространств, линейных нормированных пространств, гильбертовых пространств, функционалов и операторов на них; теория меры и интегрирования в общих пространствах с мерой, установление обобщающих связей между различными разделами математики, такими как классический анализ, дифференциальные уравнения, линейная алгебра и т.д. В процессе обучения студенты должны усвоить методику дисциплины и приобрести навыки исследования и решения задач функционального анализа.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП:

Дисциплина «Функциональный анализ является базовой дисциплиной и входит в состав Блока 1 (обязательная часть) «Дисциплины (модули)» Основной Профессиональной Образовательной Программы по направлению подготовки – 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.

Для изучения этой дисциплины необходимы знания основных методов линейной алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений. Дисциплина является интегральной и формирует обобщающие фундаментальные математические знания, необходимые для изучения основных прикладных курсов, посвященных аналитическому математическому и имитационному компьютерному моделированию реальных объектов, а также других дисциплин базовой и вариативной частей профессионального цикла этой ОПОП и для прохождения государственной итоговой аттестации.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ), СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОСНОВНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Процесс изучения дисциплины в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем направлен на формирование следующих компетенций:

Код и наименование реализуемой компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с индикаторами достижения компетенций
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности; ОПК-2 Способен применять современный математический аппарат, связанный с проектиро-	**Знать**: основные теоретические положения функционального анализа, методы решения и исследования важнейших типовых задач, важнейшие итерационные алгоритмы. **Уметь**: правильно проводить математическую формализацию задач, выбирать адекватные математические модели, математически корректно применять методы функционального анализа, выполнять интерпретацию математических результатов для реальных систем.

ванием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности	**Владеть:** знаниями основных понятий, утверждений, а также методами функционального анализа, как теоретическими, так и численными.

4. ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах (всего): 3 зачетные единицы.

4.2. Объем дисциплины по видам учебной работы (в часах):

Вид учебной работы	**Количество часов (форма обучения очная)**	
	Всего по плану	**В т.ч. по семестрам**
		5 семестр
1	2	3
Контактная работа обучающихся с преподавателем в соответствии с УП	72/72	72/72*
Аудиторные занятия:	72/72	72/72*
Лекции	36/36	36/36*
Семинары и практические занятия	36/36	36/36*
Лабораторные работы, практикумы	-	-
Самостоятельная работа	36	36
Контроль	-	-
Форма текущего контроля знаний и контроля самостоятельной работы:	устный опрос, тестирование, проверка решения задач	устный опрос, тестирование, проверка решения задач
Курсовая работа	-	-
Виды промежуточной/итоговой аттестации (экзамен, зачет)	зачет	зачет
Всего часов по дисциплине	108	108

*В случае необходимости использования в учебном процессе частично/исключительно дистанционных образовательных технологий в таблице через слеш указывается количество часов работы ППС с обучающимися для проведения занятий в дистанционном формате с применением электронного обучения.

4.3. Содержание дисциплины (модуля). Распределение часов по темам и видам учебной работы:

Форма обучения: очная.

Название разделов и тем	**Всего**	**Виды учебных занятий**					**Форма текущего контроля знаний**
		Аудиторные занятия			**Занятия в интерактивной форме**	**Самостоятельная работа**	
		Лекции	**Практические занятия, семинары**	**Лабораторные работы, практикумы**			

1	2	3	4	5	6	7	8
Раздел 1. Метрические пространства							
Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Сепарабельность. Пример сепарабельного и несепарабельного пространства. Полные метрические пространства, примеры. Неполнота пространства CLp[0,1], p>=1. Лемма о вложенных шарах. Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа. Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью. Теорема Арцела. Критерий компактности в l_p, $p>=\mathbf{1}$. Принцип сжимающих отображений. Примеры.	24	8	8	-	-	8	Устный опрос, проверка решения задач, тестирование
Раздел 2. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега							
Полукольцо прямоугольников в R^2 и σ-аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств. Измери-	24	8	8	-	-	8	Устный опрос, проверка решения задач

мые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации: $\boldsymbol{A}$ измеримо по Жордану $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$ измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации. Теорема о σ-алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке. Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер. Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду. Связь между сходимо-							

стью почти всюду и по мере. Контрпример. Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова (без доказательства). Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд с единичными интервалами. Теоремы Б. Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Теорема о полноте пространства $L_1[0,1]$. Теорема о сепарабельности пространства $L_1[0,1]$ (плотность в нем непрерывных функций).							
Раздел 3. Линейные нормированные пространства. Линейные непрерывные функционалы и операторы							
Линейные нормированные и банаховы пространств. Линейные непрерывные функции , их норма . Эквивалентность непрерывности и ограниченности. Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, со-	18	6	6	-	-	6	Устный опрос, проверка решения задач

пряженном к l_p, $p\geq 1$. Теорема Хана-Банаха. Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном баховом пространстве. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Банаха об обратном операторе. Достаточность одного из условий *Ker A=0* или *Im=L* для обратимости оператора $\mathbf{A}\in \boldsymbol{L}(\mathrm{L})$ в конечномерном пространстве L. Примеры необходимых операторов, для которых выполнено одно из условий *Ker A=0* или *Im=L*.							
Раздел 4. Предгильбертовы и гильбертовы пространства							
Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры. Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС в сепарабельном гильбертовом пространстве. Нера-	18	6	6	-	-	6	Устный опрос, проверка решения задач

венство Бесселя и равенство Парсеваля. Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимость элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.							
Раздел 5. Спектр и резольвента оператора. Сопряженные и самосопряженные операторы							
Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного.	12	4	4	-	-	4	Устный опрос, проверка решения задач, контрольная работа

Спектр сопряженного оператора. Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора. Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному. Необратимость компактного оператора. Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре самосопряженного оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта.							
Раздел 6. Обобщенные функции							
Пространство основных функций, его нетривиальность, сходимость в нем. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Примеры. Бесконечная дифференцируемость обобщенных функций. Сходимость обобщенных функций, δ-образные последовательности. Примеры рядов, сходящихся в	12	4	4	-	-	4	Устный опрос, проверка решения задач.

смысле обобщенных функций. Преобразование Фурье обобщенных функций.							
Зачет							
Итого 5 семестр	108	36	36	-	-	36	-
Всего	108	36	36	-	-	36	-

5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Раздел 1. Метрические пространства

Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Сепарабельность. Пример сепарабельного и несепарабельного пространства. Полные метрические пространства, примеры. Неполнота пространства CLp[0,1], p>=1. Лемма о вложенных шарах. Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа. Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью. Теорема Арцела. Критерий компактности в l_p, $p>=\boldsymbol{1}$. Принцип сжимающих отображений. Примеры.

Раздел 2. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега

Полукольцо прямоугольников в R^2 и σ-аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств. Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации: $\boldsymbol{A}$ измеримо по Жордану $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$ измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации. Теорема о σ-алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке. Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.

Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду. Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример. Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова (без доказательства). Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд с единичными интервалами. Теоремы Б. Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Теорема о полноте пространства $L_1[0,1]$. Теорема о сепарабельности пространства $L_1[0,1]$ (плотность в нем непрерывных функций).

Раздел 3. Линейные нормированные пространства. Линейные непрерывные функционалы и операторы

Линейные нормированные и банаховы пространств. Линейные непрерывные функции , их норма . Эквивалентность непрерывности и ограниченности. Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к l_p, $p\geq 1$. Теорема Хана-Банаха. Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы.

Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном баховом пространстве. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Банаха об обратном операторе. Достаточность одного из условий $Ker\ A=0$ или $Im=L$ для обратимости оператора $\mathbf{A} \in \boldsymbol{L}(\mathrm{L})$ в конечномерном пространстве L**.** Примеры необходимых операторов, для которых выполнено одно из условий $Ker\ A=0$ или $Im=L$.

Раздел 4. Предгильбертовы и гильбертовы пространства

Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры. Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС в сепарабельном гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимость элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.

Раздел 5. Спектр и резольвента оператора. Сопряженные и самосопряженные операторы

Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора. Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора. Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному. Необратимость компактного оператора. Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре самосопряженного оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта.

Раздел 6. Обобщенные функции

Пространство основных функций, его нетривиальность, сходимость в нем. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Примеры. Бесконечная дифференцируемость обобщенных функций. Сходимость обобщенных функций, δ-образные последовательности. Примеры рядов, сходящихся в смысле обобщенных функций. Преобразование Фурье обобщенных функций.

6. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

1) Примеры метрических пространств.
2) Корректность метрик.
3) Сепарабельность метрических пространств.
4) Полнота метрических пространств.
5) Предкомпактность и компактность в метрических пространствах.
6) Принцип сжимающих отображений.
7) Мера Лебега.
8) Интеграл Лебега.
9) Линейные непрерывные функционалы.
10) Норма линейных непрерывных функционалов.
11) Линейные непрерывные операторы.
12) Норма линейного непрерывного оператора.
13) Контрольная работа.

14) Решение простейших интегральных уравнений.
15) Задачи на спектр и резольвенту линейных непрерывных операторов.
16) Задачи на собственные значения и собственные функции.
17) Обобщенные функции. Основные свойства.
18) Применение обобщенных функций к решению линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

7. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ, ПРАКТИКУМЫ

Данный вид работы не предусмотрен учебным планом.

8. ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, РЕФЕРАТОВ

Выполнение курсовых работ и рефератов не предусмотрено учебным планом.

Примерная тематика контрольных работ по дисциплине:

Вариант 1

Задача 1. Определяет ли данная функция расстояние в $\mathbb{R}$? $\rho(x,y)=arctg(x-y)^2$.

Задача 2. Является ли пространство C[0,1] полным с данной метрикой?

$\rho(f,g)=\max\limits_{0\le x\le 1}(\frac{1}{1+x^2}|f(x)-g(x)|)$.

Задача 3. Пусть $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2, \|z\|=\max(|x|,|y|)$. Подпространство $L_0=\{(x,y): y+3x=0\},\ \ f_0(x,y)=x+y$. Продолжить функционал f_0 на $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы.

Задача 4. Найти нормы функционала в C[0,1] и $L_1[0,1]$. $F(f)=3\int\limits_0^{1/2} f(t)dt-2\int\limits_{1/2}^{1} f(t)dt$.

Задача 5. Найти норму оператора $A:\ell_2\to\ell_2,\ \ A\{x_n\}=\left\{\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^n x_n\right\}$.

Вариант 2

Задача 1. Определяет ли данная функция расстояние в $\mathbb{R}$? $\rho(x,y)=\arcsin\left(\frac{|x-y|}{1+|x-y|}\right)$.

Задача 2. Является ли пространство C[0,1] полным с данной метрикой?
$\rho(f,g)=\max\limits_{0\le x\le 1}(x\cos x|f(x)-g(x)|)$.

Задача 3. Пусть $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2, \|z\|=|x|+|y|$. Подпространство $L_0=\{(x,y): y+2x=0\}$, $f_0(x,y)=3y$. Продолжить функционал f_0 на $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы.

Задача 4. Найти нормы функционала в C[0,1] и $L_1[0,1]$. $F(f)=2\int\limits_0^{1/3} f(t)dt-6\int\limits_{2/3}^{1} f(t)dt$.

Задача 5. Найти норму оператора $A: C[1,4]\to C[1,4],\ \ Af(x)=(x^2+\frac{16}{x}-16)f(x)$.

9. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ

1. Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Сепарабельность. Пример сепарабельного и несепарабельного пространства.
2. Полные метрические пространства, примеры. Полнота пространства CLp[0,1], p>=1 . Лемма о вложенных шарах.
3. Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа.
4. Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью.
5. Теорема Арцела.
6. Критерий предкомпактности в $l_p, p \geq 1$.
7. Принцип сжимающих отображений. Разрешимость уравнения $f(x)+\int_0^x K(x,t)f(t)dt = g(x)$.
8. Полукольцо прямоугольников в R^2 и σ- аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств (без доказательства). Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации: A измеримо по Жордану => A измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации.
9. Теорема о σ- алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке.
10. Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.
11. Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры.
12. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду.
13. Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример.
14. Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова (без доказательства).
15. Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu(f^{-1}[k,k+1])$.
16. Теоремы Б.Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Условие интегрируемости функции $f(x)=x^{-\alpha}$ на $[0,1], \alpha \in R$.
17. Теорема о полноте пространства $L_1[0,1]$.
18. Теорема о сепарабельности пространства $L_1[0,1]$ (плотность в нем непрерывных функций)
19. Линейные нормированные и банаховы пространства. Линейные непрерывные функционалы, их норма. Эквивалентность непрерывности и ограниченности.
20. Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к $l_p, p \geq 1$.
21. Теорема Хана-Банаха.

22. Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве.
23. Теорема Банаха-Штейнгауза.
24. Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства). Достаточность одного из условий $KerA = 0$ или $\operatorname{Im} A = L$ для обратимости оператора $A \in L(L)$ в конечномерном пространстве L . Примеры необходимых операторов $A \in L(L)$, для которых выполнено одно из условий $KerA \neq 0$ или $\operatorname{Im} A \neq L$.
25. Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры.
26. Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС с сепарабельном гильбертовом пространстве.
27. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
28. Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфность бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств.
29. Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимость элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.
30. Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора.
31. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора.
32. Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора.
33. Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному.
34. Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре компактного самосопряженного оператора.
35. Теорема Гильберта.

36. Пространство основных и обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции, действия над ними. Фундаментальное решение дифференциального оператора и решение неоднородного ДУ.

10. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩИХСЯ

Форма обучения: очная.

Название разделов и тем	**Вид самостоятельной работы *(проработка учебного материала, решение задач, реферат, доклад, контрольная работа, подготовка к сдаче зачета, зачета и др.)***	**Объем в часах**	**Форма контроля (*проверка решения задач, реферата и др.)***
Раздел 1. Метрические пространства			
Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос

Сепарабельность. Пример сепарабельного и не сепарабельного пространства.			
Полные метрические пространства, примеры. Полнота пространства CLp[0,1], p>=1 . Лемма о вложенных шарах.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Теорема Арцела.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Критерий предкомпактности в $l_p, p \geq 1$.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Принцип сжимающих отображений. Разрешимость линейного интегрального уравнения Вольтерра с нелинейным ядром.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Раздел 2. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега			
Полукольцо прямоугольников в R^2 и σ- аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств (без доказательства). Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации: A измеримо по Жордану => A измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Теорема о σ- алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	
Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос

Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu(f^{-1}[k,k+1])$.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Теоремы Б.Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Условие интегрируемости функции $f(x)=x^{-\alpha}$ на $[0,1], \alpha \in R$.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Теорема о полноте пространства $L_1[0,1]$.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Теорема о сепарабельности пространства $L_1[0,1]$ (плотность в нем непрерывных функций).	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Раздел 3. Линейные нормированные пространства. Линейные непрерывные функционалы и операторы			
Линейные нормированные и банаховы пространства. Линейные непрерывные функционалы, их норма. Эквивалентность непрерывности и ограниченности.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к $l_p, p \geq 1$.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач

Теорема Хана-Банаха.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Теорема Банаха-Штейнгауза.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства). Достаточность одного из условий $KerA = 0$ или $\operatorname{Im} A = L$ для обратимости оператора $A \in L(L)$ в конечномерном пространстве L . Примеры необходимых операторов $A \in L(L)$, для которых выполнено одно из условий $KerA \neq 0$ или $\operatorname{Im} A \neq L$.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Раздел 4. Предгильбертовы и гильбертовы пространства			
Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС с сепарабельном гильбертовом пространстве.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфность бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимость элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Раздел 5. Спектр и резольвента оператора. Сопряженные и самосопряженные операторы			

Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре компактного самосопряженного оператора.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Теорема Гильберта.		1	устный опрос
Раздел 6. Обобщённые функции			
Пространство основных и обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции, действия над ними.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Фундаментальное решение дифференциального оператора и решение неоднородного ДУ.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач

11. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) Список рекомендуемой литературы

основная

1. Колмогоров, Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / Колмогоров Андрей Николаевич, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989.
2. Богданов, А. Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А. Ю. Богданов. - Ульяновск : УлГУ, 2003. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
3. Треногин В.А., Функциональный анализ : Учебник. / Треногин В.А. - 3-е изд., испр. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 488 с. - ISBN 5-9221-0272-9 - Текст : электронный // ЭБС

"Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102729.html

дополнительная

1. Лебедев В.И., Функциональный анализ и вычислительная математика : Учеб. пособие. / Лебедев В.И. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 296 с. - ISBN 5-9221-0092-0 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922100920.html
2. Люстерник, Лазарь Аронович. Краткий курс функционального анализа : учеб. пособие для вузов / Люстерник Лазарь Аронович, В. И. Соболев. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2009
3. Ревина С.В., Функциональный анализ в примерах и задачах : учебное пособие / Ревина С.В., Сазонов Л.И. - Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2009. - 120 с. - ISBN 978-5-9275-0683-5 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785927506835.html
4. Осиленкер, Б. П. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-практическое пособие / Б. П. Осиленкер. — Москва : Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2015. — 132 с. — ISBN 978-5-7264-1186-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/60819.html

учебно-методическая

1. Богданов, Андрей Юрьевич**.** Методы функционального анализа в вычислительной математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 1 : / Богданов Андрей Юрьевич ; УлГУ, ФМИТ. - Ульяновск : УлГУ, 2012. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/231/bogdanov3.pdf
2. Богданов, Андрей Юрьевич. Методы функционального анализа в вычислительной математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 2 : / Богданов Андрей Юрьевич ; УлГУ, ФМиИТ. - Ульяновск : УлГУ, 2015. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/242/bogdanov-2_2015.pdf
3. Богданов, Андрей Юрьевич. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб.-метод. пособие / Богданов Андрей Юрьевич. - Ульяновск : УлГУ, 2008.URLhttp://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf
4. Богданов А. Ю. Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине «Функциональный анализ» для направления 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» профиль «Технология программирования» / А. Ю. Богданов; УлГУ, ФМИиАТ. - Ульяновск : УлГУ, 2019. - Загл. с экрана; Неопубликованный ресурс. - Электрон. текстовые дан. (1 файл : 619 КБ). - Текст : электронный. http://lib.ulsu.ru/ProtectedView/Book/ViewBook/7609

Согласовано:

Гл. биб-рь ИБ УлГУ	Полина И.Ю		08.06.2020
должность сотрудника научной библиотеки	ФИО	подпись	дата

б) Программное обеспечение: МойОфис Стандартный, Альт Рабочая станция 8.

в) Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы

1. Электронно-библиотечные системы:

1.1. **IPRbooks** [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / группа компаний Ай Пи Эр Медиа . - Электрон. дан. - Саратов , [2020]. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru.

1.2. **ЮРАЙТ** [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО Электронное издательство ЮРАЙТ. - Электрон. дан. – Москва , [2020]. - Режим доступа: https://www.biblio-online.ru.

1.3. **Консультант студента** [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО Политехресурс. - Электрон. дан. – Москва, [2020]. - Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/pages/catalogue.html.

1.4. **Лань** [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО ЭБС Лань. - Электрон. дан. – С.-Петербург, [2020]. - Режим доступа: https://e.lanbook.com.

1.5**. Znanium.com** [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО Знаниум. - Электрон. дан. – Москва, [2020]. - Режим доступа: http://znanium.com.

2. **КонсультантПлюс** [Электронный ресурс]: справочная правовая система /Компания «Консультант Плюс». – Электрон. дан. – Москва : КонсультантПлюс, [2020].
3**. База данных периодических изданий** [Электронный ресурс] : электронные журналы / ООО ИВИС. - Электрон. дан. - Москва, [2020]. - Режим доступа: https://dlib.eastview.com/browse/udb/12.

4. **Национальная электронная библиотека** [Электронный ресурс]: электронная библиотека. - Электрон. дан. – Москва, [2020]. - Режим доступа: https://нэб.рф.

5. **Электронная библиотека диссертаций РГБ** [Электронный ресурс]: электронная библиотека / ФГБУ РГБ. - Электрон. дан. – Москва, [2020]. - Режим доступа: https://dvs.rsl.ru.

6. Федеральные информационно-образовательные порталы:

6.1. Информационная система Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Режим доступа: http://window.edu.ru

6.2. Федеральный портал Российское образование. Режим доступа: http://www.edu.ru

7. Образовательные ресурсы УлГУ:

7.1. Электронная библиотека УлГУ. Режим доступа : http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Web

7.2. Образовательный портал УлГУ. Режим доступа : http://edu.ulsu.ru

Согласовано:
зам. нач. УИТ / Клочкова АВ / [подпись] 08.06.2020
должность сотрудника УИТиТ ФИО подпись дата

12. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ:

Аудитории для проведения лекций, семинарских занятий, для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, групповых и индивидуальных консультаций.

13. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться одни из следующих вариантов восприятия информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей:

– для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

В случае необходимости использования в учебном процессе частично/исключительно дистанционных образовательных технологий, организация работы ППС с обучающимися с ОВЗ и инвалидами предусматривается в электронной информационно-образовательной среде с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

Разработчик	______________	______доцент______	_____Богданов А.Ю.____
	подпись	должность	ФИО